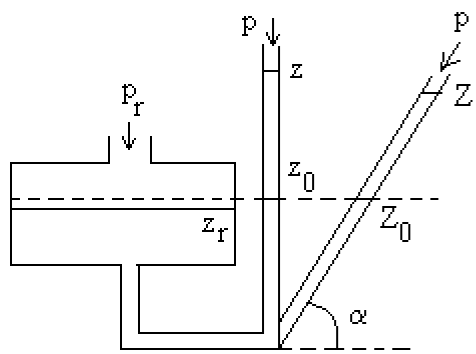
Exercices de statique des fluides

1 - La figure schématise un manomètre à liquide (masse volumique μ) à réservoir de section



constante S ; celle du tube vertical est s. Lorsque $p_r = p = p_0$, on a $z_r = z = z_0$ repérable à travers le tube. Lorsque $p \neq p_r$, les cotes des deux surfaces libres deviennent z_r et z, cette dernière cote étant seule repérable.

1) Exprimer la pression différentielle $p' = p_r - p$ en fonction de ($z - z_0$) et de μ, g, s, S ($s / S << 1$).

2) Exprimer la sensibilité $\Delta z / \Delta p'$

3) On incline le tube du manomètre, sa direction faisant un angle α avec le plan horizontal. La position du ménisque le long du tube est repérée par son abscisse Z.

Calculer la nouvelle sensibilité.

Réponse

1

$$S(z_0 - z_r) = s(z - z_0)$$

$$p' = p_r - p = \mu g(z - z_r) = \mu g(z - z_0)(1 + \frac{s}{S})$$

2

$$\frac{\Delta z}{\Delta p'} = \frac{1}{\mu g(1 + s / S)} \approx \frac{1}{\mu g}$$

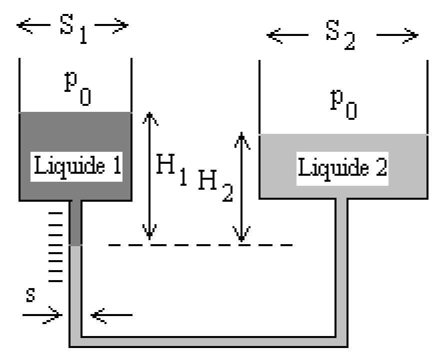
3

$$S(Z_0 - Z_r)\sin\alpha = s(Z - Z_0)$$

$$p' = p_r - p = \mu g(Z - Z_r)\sin\alpha = \mu\, g \sin\alpha(z - z_0)(1 + \frac{s}{S\sin\alpha})$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta p'} = \frac{1}{\mu\, g \sin\alpha (1 + \dfrac{s}{S \sin\alpha})} \approx \frac{1}{\mu\, g \sin\alpha}$$

2 - Un manomètre différentiel est constitué de deux récipients cylindriques, de sections droites respectives S_1 et S_2, reliés par un tube de section intérieure *s* constante.



L'ensemble contient deux liquides non miscibles de masses volumiques μ_1 et μ_2.

1) Initialement, la pression au-dessus des deux liquides est la même et égale à p_0, la surface de séparation est définie par H_1 et H_2.

En déduire une relation entre μ_1, μ_2, H_1 et H_2.

2) On provoque au-dessus du liquide 1 une surpression Δp et la surface de séparation des deux liquides se déplace de Δh.

En déduire la sensibilité $\Delta h / \Delta p$.

A.N. $\mu_1 = 998\, Kg/m^3$; $\mu_2 = 1024\, Kg/m^3$; $S_1 = S_2 = 100 s$

Réponse

1

$$p_0 + \mu_1 g H_1 = p_0 + \mu_2 g H_2 \Rightarrow \mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$$

2**2)** La pression augmentant du coté 1, la surface de séparation des deux liquides baisse de Δh, la surface libre du liquide 1 baisse de $h_1 = \dfrac{s\Delta h}{S_1}$, celle du liquide 2 augmente de $h_2 = \dfrac{s\Delta h}{S_2}$.

L'égalité des pressions à la surface de séparation des deux liquides donne :

$$p_0 + \Delta p + \mu_1 g\left[H_1 - h_1 + \Delta h\right] = p_0 + \mu_2 g\left[H_2 + h_2 + \Delta h\right]$$

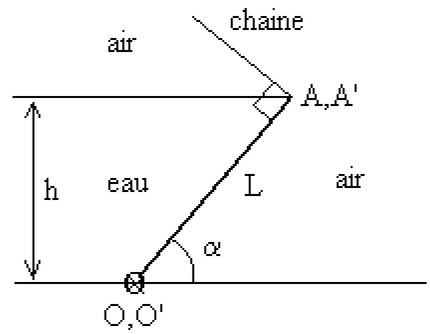
Par suite $\Delta p + \mu_1 g\left[-h_1 + \Delta h\right] = \mu_2 g\left[h_2 + \Delta h\right]$

$$\Delta p = (\mu_2 - \mu_1)g\Delta h + g(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) = (\mu_2 - \mu_1)g\Delta h + gs\Delta h(\frac{\mu_1}{S_1} + \frac{\mu_2}{S_2})$$

$$= g\Delta h\left[\mu_2 - \mu_1 + s(\frac{\mu_1}{S_1} + \frac{\mu_2}{S_2})\right]$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta p} = \frac{1}{g\left[\mu_2 - \mu_1 + s(\frac{\mu_1}{S_1} + \frac{\mu_2}{S_2})\right]} = 2{,}2\ mm/Pa$$

3 – La figure ci-contre représente une vanne rectan-gulaire (L *x* l) en coupe verticale destinée à fixer le niveau d'eau (hauteur h) d'une retenue. Cette vanne est articulée à sa base sur un axe OO' et maintenue au sommet par 2 chaînes parallèles manoeuvrées par un treuil. En position haute (angle α) on supposera la direction des chaînes perpendiculaires à la vanne.

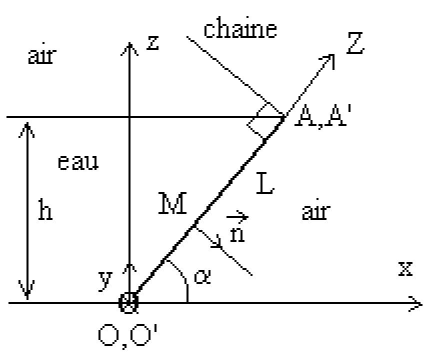


1) Calculer la poussée sur la vanne due à la pression hydrostatique et son centre d'application.

2) Calculer les efforts transmis aux chaînes (on négligera le poids propre de la vanne) et la réaction de l'axe OO'.

Application numérique : $h = 4m$; $L = 5m$; $l = 6m$

Réponse



1) Soit p la pression dans l'eau. Elle obéit à la relation

$dp = -\mu g dz$ qui, après intégration, donne :

$p = \mu g(h - z) + p_a$ où p_a est la pression (uniforme) de l'air.

Sur un élément $d^2S = dZdy$ de la vanne, la force élémentaire des forces de poussée est :

$$\overrightarrow{d^2 f_r} = (p - p_a)d^2S\,\vec{n}$$

Une première intégration suivant *dy* conduit à :

$$\overrightarrow{df_r} = (p - p_a)l\,dZ\,\vec{n}$$

une deuxième suivant *z* en tenant compte de la relation $dz = \sin\alpha\, dZ$ conduit à :

$$\vec{f_r} = \vec{n}\,\mu g \frac{l}{\sin\alpha}\int_0^h (h - z)dz = \vec{n}\,\mu g \frac{lh^2}{2\sin\alpha} = \vec{n}\,\mu g \frac{h}{2} lL$$

<u>Centre d'application C</u>

Il est défini par $\overrightarrow{M_O} = \int_{forces de pression} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d^2 f_r} = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{f_r}$

$$\int_{forces de pression} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d^2 f_r} = \int_{forces de pression} (\frac{l}{2}\vec{e_y} + Z\,\vec{e_Z}) \wedge \overrightarrow{df_r} = \frac{l}{2}\vec{e_y} \wedge \vec{f_r} + \frac{\mu g l h^3}{6\sin^2\alpha}\vec{e_y}$$

Par suite, $\overrightarrow{OC} = \frac{l}{2}\vec{e_y} + \frac{L}{3}\vec{e_Z}$

2) Soit $\vec{R}$ la réaction de l'axe *OO'* et $\vec{F} = -F\vec{n}$ l'effort transmis par les chaînes (chaque chaîne transmet la moitié de cet effort).

$$\vec{R} + \vec{F} + \vec{f_r} = 0$$

L'application du moment des forces au point *D* milieu de *OO'* donne :

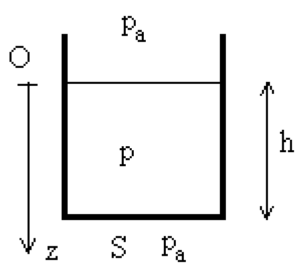
$$\overrightarrow{DD} \wedge \vec{R} + L\vec{e_Z} \wedge \vec{F} + \frac{L}{3}\vec{e_Z} \wedge \vec{f_r} = 0$$

Après calcul, $\vec{F} = -\mu g l L \frac{h}{3}\vec{n}$ et $\vec{R} = -2\mu g l L \frac{h}{3}\vec{n}$

$f_r = 5{,}88 10^5\ N$; $F = 1{,}96 10^5\ N$; $R = 3{,}92 10^5\ N$

4 - On remplit d'eau sur une hauteur *h* un verre de forme cylindrique. On appelle *S* la section de sa base.
1) Calculer la résultante des forces de pression sur les parois du verre. Interpréter le résultat
2) Mêmes questions avec un verre en forme de cône, un verre ballon.

Réponse



1) $p = \mu g z + p_a$

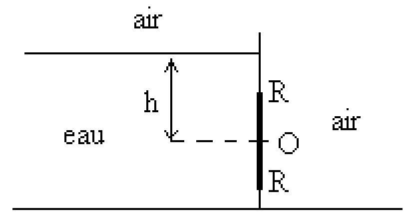
Par symétrie, la résultante des forces de pression sur les parois verticales s'annulent.

Sur le fond, $\overrightarrow{df_r} = [p(h) - p_a] dS\vec{e_z} = \mu g h dS\vec{e_z}$

$\Rightarrow \vec{f_r} = \mu g h S\vec{e_z} = \vec{P}$ (poids de l'eau)
Ce résultat peut être obtenu directement en faisant un bilan global sur le système eau.

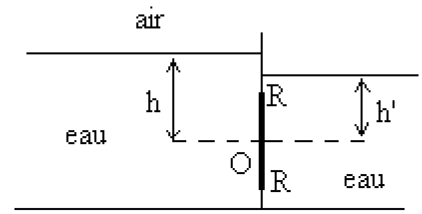
2) La réponse est indépendante de la forme du verre.

5 - Une vanne de vidange est constituée par un disque de rayon *R* pivotant autour d'un axe horizontal. Le centre O du disque est positionné à une hauteur *h* par rapport au niveau d'eau.



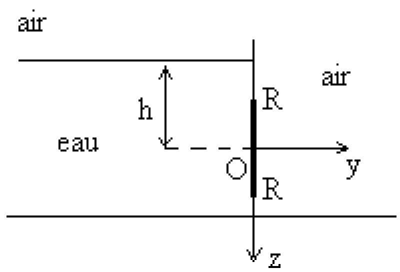
1) Calculer la poussée sur le disque et la position du centre de poussée.

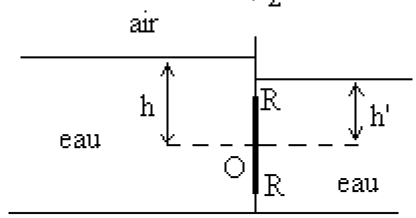
2) Reprendre le calcul dans le cas où le disque est noyé (eau de chaque coté du disque). Ce cas est celui d'une écluse.

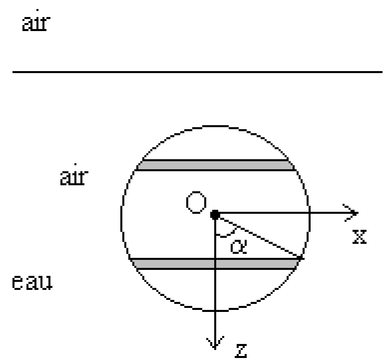


Application numérique : $h = 2m$; $R = 0,5m$

Reponse







1) $p = \mu g(h+z) + p_a$

Par symétrie, on associe les éléments de surface symétriques d'épaisseur *dz* en position *z* et *–z*

La résultante des forces de pression due à l'eau et à l'air sur ces éléments est égale à :
$\overrightarrow{df_r} = \mu g[(h+z)+(h-z)]dS\vec{e_y} \Rightarrow \vec{f_r} = \mu g 2h\frac{\pi R^2}{2}\vec{e_y} = \mu g h \pi R^2 \vec{e_y}$ résultante des forces de pression.

Calcul du moment des forces de pression

$d\overrightarrow{M_O} = -\mu g[(h+z)z-(h-z)z]dS\vec{e_y} = -4\mu g z^2\sqrt{R^2-z^2}dz\vec{e_y}$ où $dS = 2\sqrt{R^2-z^2}dz$.

Pour l'intégration à tous les éléments de surface du disque, on utilise le changement de variables $\sin\alpha = \frac{\sqrt{R^2-z^2}}{R}$; $\cos\alpha = \frac{z}{R}$ et on obtient $\overrightarrow{M_O} = -\frac{1}{4}\mu g\pi R^4\vec{e_y}$

Le centre de poussée sera déterminée par $\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OC}\wedge\vec{f_r} = -z_C\mu g h\pi R^2\vec{e_y}$

$\Rightarrow z_C = \frac{1}{4}\frac{R^2}{h}$

2) En introduisant la pression nouvelle $p' = \mu g(h'+z)+p_a$, on obtient :

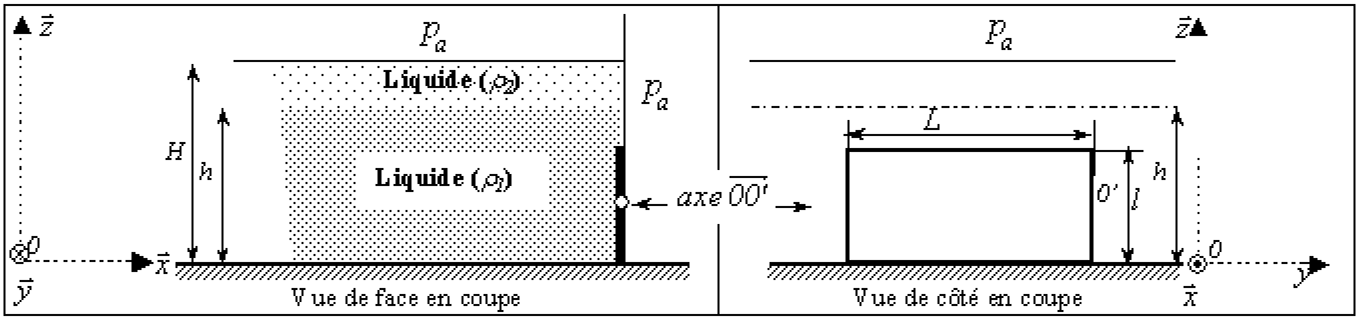
$\vec{f_r} = \mu g(h-h')\pi R^2\vec{e_y}$ et $\overrightarrow{M_O} = \vec{0}$

6) Une vanne plane verticale de forme rectangulaire (largeur *L* et de hauteur *l*), articulée autour d'un axe $\overrightarrow{OO'}$ (figure ci-dessous), maintient le niveau de deux liquides non miscibles de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2. Le niveau du liquide de masse volumique ρ_1 se situe à une hauteur *h* (le liquide 1 dépasse l'extrémité haute de la vanne). L'autre liquide de masse volumique ρ_2 est situé à une hauteur *H-h* au de dessus du premier liquide. La face de la vanne du côté liquide est complètement noyée dans le liquide de masse volumique ρ_1.

1) Calculer la force de poussée due à la pression hydrostatique du liquide s'exerçant sur la face verticale de la vanne.

2) Déterminer la position du point d'application *C* de cette poussée en fonction de h, l, L, ρ_1, ρ_2 et H .

On vérifiera que $H = h = l \Rightarrow OG = \frac{h}{3} = \frac{l}{3}$



Réponse

1) $dp_2 = -\rho_2 g dz$ et $p_2(H) = p_a \Rightarrow p_2 = \rho_2 g(H-z) + p_a$

$dp_1 = -\rho_1 g dz$ et $p_1(h) = p_2(h) \Rightarrow p_1 = \rho_1 g(h-z) + \rho_2 g(H-h) + p_a$

$$\vec{F} = \iint_{vanne} p\,\overrightarrow{dS} = \vec{e}_x \int_0^l (p_1 - p_a) L dz = \vec{e}_x\, Ll[\rho_1 g(h - \frac{l}{2}) + \rho_2 g(H-h)]$$

2) Le moment des forces est égal à :

$$\vec{M} = \int_{vanne} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{d^2F} = \int_0^l z\vec{e}_z \wedge (p_1 - p_a) L dz \vec{e}_x = \vec{e}_y\, L \int_0^l (p_1 - p_a) z dz = \vec{e}_y \frac{Ll^2}{2}[\rho_1 g(h - \frac{2l}{3}) + \rho_2 g(H-h)]$$

La position du centre de poussée sera déterminée par :

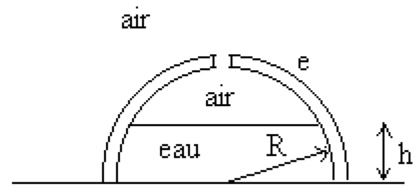
$$\vec{M} = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = \vec{e}_y\, z_C Ll[\rho_1 g(h - \frac{l}{2}) + \rho_2 g(H-h)]$$

Soit

$$z_C = \frac{l}{2}\; \frac{\rho_1 g(h - \frac{2l}{3}) + \rho_2 g(H-h)}{\rho_1 g(h - \frac{l}{2}) + \rho_2 g(H-h)}$$

Cas particulier : $H = h = l \Rightarrow z_C = \frac{l}{3}$

7 - Une cloche hémisphèrique (rayon *R*, épaisseur *e*<< *R*, masse *m*) repose sur un plan horizontal.
Elle contient de l'eau jusqu'à une hauteur *h*. Un orifice pratiqué au sommet permet de maintenir la pression atmosphèrique à l'interface eau/air.
L'épaisseur de paroi *e* est suffisamment faible pour considérer comme identiques les surfaces intérieure et extérieure de la cloche.

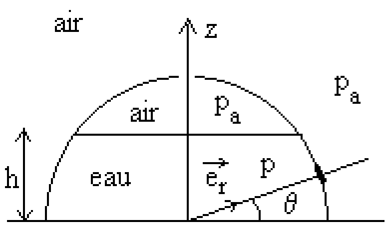


Montrer qu'il existe une hauteur critique h_c de h au delà de laquelle l'équilibre est rompu (la cloche se soulève)

Application numérique : cloche en verre de densité *d* = 2,5 telle que *e/R* = 0,02

Reponse

$$p = \mu g(h - z) + p_a$$



Sur un élément de surface d^2S de la cloche en contact avec l'eau, la résultant des forces de pression est :

$$\overrightarrow{d^2 f_r} = \mu g(h - z) d^2 S \vec{e_r}$$

Par raison de symétrie de révolution autour de l'axe *z*, la contribution de cette force à la force résultante est :

$$\overrightarrow{d^2 f_{rz}} = \mu g(h - z) \sin\theta \vec{e_z}$$

En associant tous les éléments de surface à même hauteur *z*,

$$\overrightarrow{df_{rz}} = \mu g(h - z) \sin\theta \, 2\pi R \cos\theta \, Rd\theta \vec{e_z}$$

Pour intégrer à tous les éléments de surface de la cloche, il est commode d'utiliser $z = R\sin\theta$ et $h = R\sin\theta_0$.

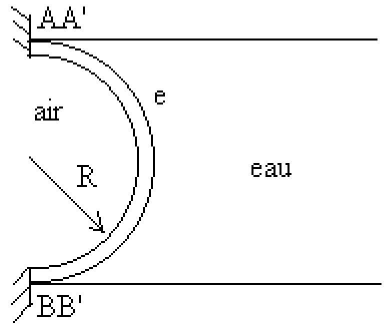
On obtient $\overrightarrow{f_{rz}} = \mu g \dfrac{\pi h^3}{3} \vec{e_z}$

Si $mg < \mu g \dfrac{\pi h^3}{3}$, la cloche se soulève.

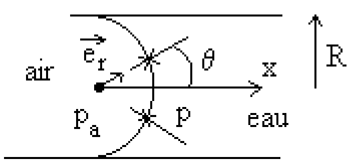
$$h_c = \left(\frac{3m}{\pi\mu}\right)^{1/3} = (6R^2ed)^{1/3} = 0{,}67R$$

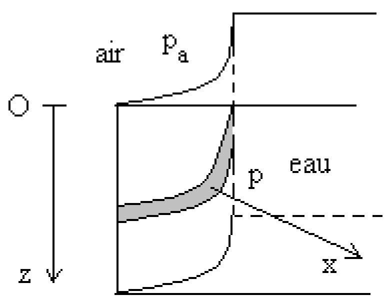
8 - Etude succincte d'un barrage voûte en forme de ½ cylindre (épaisseur de paroi *e*, rayon moyen *R*, hauteur *h* ; *e/R* << 1).
Ce barrage est en appui selon AA' et BB' (parallèle à l'axe *z* vertical de la voûte).

Calculer la poussée totale sur le barrage et la réaction des appuis.
Application numérique : $h = R = 100m$; $e = 10m$



Réponse 1 |





$$\overrightarrow{d^2f_r} = (p - p_a)\,d^2S\,\vec{e}_r = -\mu gz\,d^2S\,\vec{e}_r$$

En utilisant les symétries, on obtient $\overrightarrow{d^2f_x} = -\mu gz\cos\theta\,Rd\theta\,dz\,\vec{e}_x$.
Par intégration, on obtient,

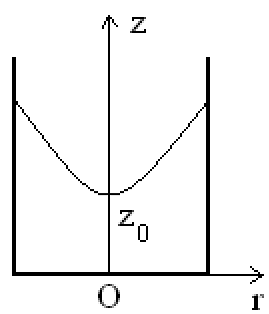
$$\vec{f}_x = -\vec{e}_x\,\mu gR\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^h zdz = -\vec{e}_x\,\mu gRh^2 = -\vec{e}_x\,\mu g\frac{h}{2}2Rh$$

$\vec{R} = -\vec{f}_x$ **réaction des appuis**

$$\left|\vec{f}_x\right| = 9{,}8\,10^9\ N$$

9 – Un récipient cylindrique de rayon R, d'axe vertical Oz, contient une hauteur h de liquide de masse volumique μ. Le récipient est mis en rotation, à vitesse angulaire ω, autour de l'axe Oz.
Le liquide est entraîné par le cylindre et on admet que chaque couche de liquide est entraînée à la vitesse angulaire. Dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire ω, le liquide est donc en équilibre dans le référentiel tournant.
On se propose de déterminer la forme de la surface libre du liquide.

Réponse 1 |



Dans le référentiel tournant,

$$\overrightarrow{grad}\,p = \mu(\vec{g} - \vec{a}_e) = \mu(-g\,\vec{e}_z + \omega^2 r\,\vec{e}_r)$$

Sur la surface libre, la pression est constant et égale à p_a.

$$\overrightarrow{grad}\,p\; d\overrightarrow{OM} = dp = 0 = \mu(-g\,dz + \omega^2 r\,dr),$$

soit $-gz + \omega^2 \dfrac{r^2}{2} = Cte$

Cas 1 : il y a une hauteur de liquide z_0 en $r = 0$

$$-gz + \omega^2 \frac{r^2}{2} = -gz_0$$

La conservation du volume de liquide permet de calculer z_0.

$$V = \pi R^2 h = \int_0^R z(r)\,2\pi\,r dr = \int_0^R \left(z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) 2\pi\,r dr \Rightarrow z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \geq 0 \Rightarrow \omega \leq \frac{2}{R}\sqrt{gh}$$

Cas 2 : le liquide se situe dans l'espace défini par $r_0 \leq r \leq R$

$$-gz + \omega^2 \frac{r^2}{2} = \omega^2 \frac{r_0^2}{2}$$

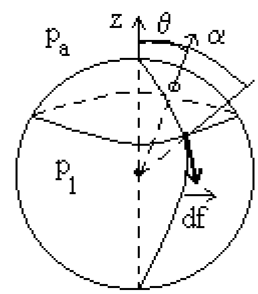
La conservation du volume de liquide permet de calculer r_0.

$$V = \pi R^2 h = \int_{r_0}^{R} z(r)\, 2\pi\, r dr = \int_0^R \frac{\omega^2}{g}(r^2 - r_0^2)\,\pi\, r dr \Rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{2gh}{\omega^2}} \geq 0 \Rightarrow \omega \geq \frac{2}{R}\sqrt{gh}$$

10 - Démontrer la loi de Laplace pour un goutte sphérique de liquide dans de l'air, pour une bulle de vapeur dans un liquide, pour une bulle de savon.

Réponse 1

Loi de Laplace



Goutte liquide

Par symétrie, la résultante des forces de pression sur la calotte sphérique supérieure est égale à :

$$\vec{e_z} \int_{\substack{calotte\\ sphérique\\ supérieure}} (p_l - p_a) ds \cos\theta = \vec{e_z}(p_l - p_a)\int_0^{\alpha} 2\pi R \sin\theta\, R\, d\theta \cos\theta =$$

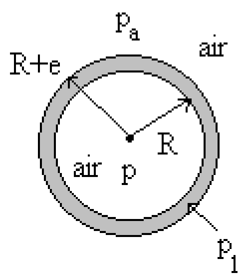
$$\vec{e_z}(p_l - p_a)\pi R^2 \sin^2\alpha$$

La résultant des forces de tension superficielle qui tire vers le bas sur la calotte supérieure est égale à :

$$\vec{e_z} \int_{\substack{cercle de\\ séparation}} A\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) dl = -\vec{e_z}\, A 2\pi R \sin^2\alpha$$

L'équilibre entraîne : $(p_l - p_a)\pi R^2 \sin^2\alpha - A 2\pi R \sin^2\alpha = 0$, soit $p_l - p_a = \frac{2A}{R}$

Bulle de savon



L'application de la loi de Laplace à la traversée de chacune des surfaces de séparation air-savon et savon-air entraîne :

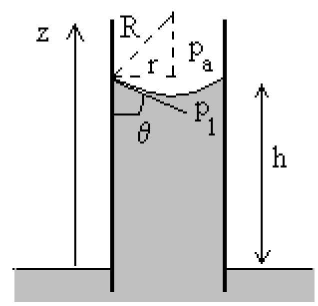
$$p - p_1 = \frac{2A}{R} \text{ et } p_1 - p_a = \frac{2A}{R+e}$$

soit $$p - p_a = \frac{2A}{R} + \frac{2A}{R+e} \approx \frac{4A}{R} \text{ puisque } e \ll R$$

11 – Démontrer la loi de Jurin

Réponse 1 |

Démonstration 1 :application de la tension superficielle



Le poids du fluide soulevée est égale à $-\mu g \pi r^2 h \vec{e_z}$

Elle est équilibrée par la résultante des forces de tension superficielle $A 2\pi r \cos\theta \vec{e_z}$

$$\Rightarrow \mu g \pi r^2 h = A 2\pi r \cos\theta \text{ soit } h = \frac{2A\cos\theta}{\mu g r}$$

Démonstration 2 : application de la loi de Laplace

$$p_a - p_1 = \frac{2A}{R} = \frac{2A\cos\theta}{r} \text{ et } p_a - p_1 = \mu g h$$

$$\text{soit } h = \frac{2A\cos\theta}{\mu g r}$$

12 – Formation d'un courant ascendant (Capes externe 1991)

Dans toute l'étude qui suit, le champ de pesanteur est supposé uniforme, l'air se comporte comme un gaz parfait de masse molaire M et de capacités thermiques C_p et C_v constantes. L'air est supposé sec. Un point N de l'atmosphère est repéré par ses coordonnées cartésiennes dans un trièdre orthonormé (Ox, Oy, Oz), tel que l'axe Oz coïncide avec la verticale ascendante, la cote $z = 0$ étant prise au niveau de la mer. Le module de l'accélération de la pesanteur est appelé g. On désigne par p la pression au point N.

1) L'air est supposé être un fluide de masse volumique ρ localement en état d'équilibre. On considère une tranche d'air d'épaisseur dz, de volume Sdz. Préciser, à l'aide d'un schéma, la nature et la direction des forces extérieures appliquées sur cette tranche.

En écrivant que cette tranche reste en équilibre, établir la relation : $\frac{dp}{dz} = -\rho g$

On appelle p_0 et T_0 la pression et la température thermodynamique au niveau de la mer, p et T la pression et la température thermodynamique à la cote z. Exprimer ρ à l'altitude z en fonction de M, p, T et de la constante molaire des gaz parfaits R.

Des relevés expérimentaux montrent qu'en l'absence de mouvement des masses d'air, la température est fonction affine de l'altitude z, pour z variant de 0 à $8000 m$, suivant la loi : $T = T_0 - \lambda z$.

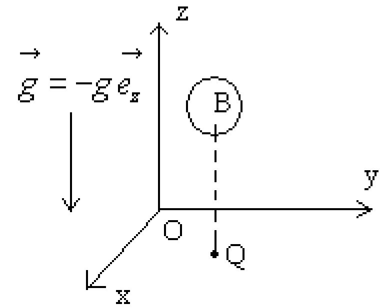
A l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits et des relations précédentes, montrer que la pression p et la température T à l'altitude z sont liées par la relation, appelée " loi de nivellement barométrique " : $T = T_0 (\frac{p}{p_0})^q$ où l'on exprimera l'exposant q en fonction de M, g, λ et R.

Quelle est la dimension physique de cet exposant ? Calculer numériquement q sachant que $\lambda = 6{,}5\,10^{-3}\ K.m^{-1}$.

On donne : $p_0 = 1{,}01\ 10^5\ Pa$ et $T_0 = 288 K$. Exprimer numériquement la pression p en fonction de la température T.

2) L'état d'équilibre étudié précédemment n'est possible que si les isothermes et les isobares coïncident avec les équipotentielles du champ de pesanteur, donc ici avec les surfaces d'équation $z = Cte$. Si, par suite d'hétérogénéités du sol, celui-ci présente des écarts de température d'un point à un autre, l'air qui surmonte ces terrains s'échauffe différemment et se met en mouvement. On se propose d'étudier de façon très simplifiée la formation d'un courant ascendant.

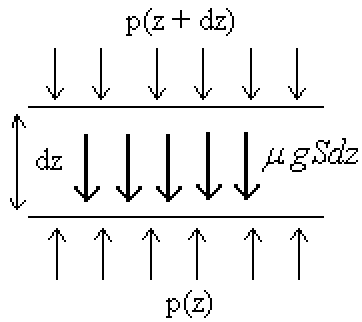
On suppose que l'air est localement, à l'altitude z_1 et à la verticale du point Q, plus chaud que l'air avoisinant. Des photographies infrarouges montrent que ce gaz se détache verticalement sous forme d'une " bulle ". Tout se passe comme si une certaine poche de gaz était limitée par une enveloppe souple et non tendue. Cette " bulle " de gaz, que l'on notera *B*, évolue ensuite sans échanger de matière ni de chaleur avec l'extérieur, la pression de la bulle restant égale à celle de l'air environnant à la même altitude. On supposera que la température de l'air environnant est toujours $T = T_0 - \lambda z$.



- On note p_B, T_B et ρ_B la pression, la température et la masse volumique du gaz emprisonné dans la bulle, T_A et ρ_A la température et la masse volumique de l'air environnant à la même altitude. Montrer que la bulle s'élève si la température T_B de la bulle est de valeur supérieure à celle de l'air environnant T_A.
- Le gaz emprisonné dans la bulle subit donc une transformation adiabatique que l'on supposera réversible. On appelle T_1 la température du gaz dans la bulle à l'altitude de sa formation z_1 et p_1 la pression à l'altitude z_1. Quelle relation lie la pression p_B et la température T_B de la bulle au cours de son ascension aux valeurs initiales p_1 et T_1 ? Exprimer T_B en fonction de p_B .
- Montrer qu'il existe une altitude plafond z_2 pour l'ascension de la bulle. On note T_2 et p_2 la température et la pression de la bulle lorsqu'elle arrive à cette altitude.
- Calculer numériquement T_2 et p_2 pour $T_1 = 280\,K$ et $z_1 = 2000\,m$. En déduire la valeur de l'altitude plafond z_2 à laquelle se stabilise la bulle.

Réponse 1 |

1)



Dans le champ de pesanteur, on considère une tranche de fluide à l'altitude z d'épaisseur dz en équilibre dans un référentiel lié au sol supposé galiléen.
L'axe des z est vertical ascendant, on appelle μ la masse volumique du fluide, $p(z+dz)$ et $p(z)$ les intensités par unité de surface des forces extérieures qui s'exercent sur les bords de la tranche.
L'écriture du principe fondamentale de la dynamique conduit à $p(z+dz)-p(z)=dp=-\rho g dz$.

$$\left.\begin{array}{l} T = T_0 - \lambda z \\ \dfrac{p}{\rho} = \dfrac{RT}{M} \\ \rho = -\dfrac{1}{g}\dfrac{dp}{dz} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R}{Mg}\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{T} \Rightarrow \frac{R\lambda}{Mg}\frac{dp}{p} = \frac{d(T_0 - \lambda z)}{T_0 - \lambda z}$$

$\Rightarrow \dfrac{R\lambda}{Mg}\ln\dfrac{p}{p_0} = \ln\dfrac{T_0-\lambda z}{T_0}$ si $T(z=0)=T_0$ et $p(z=0)=p_0$

Soit $T = T_0 - \lambda z = T_0\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^q$ où $q = \dfrac{R\lambda}{Mg} = 0{,}19$ (le nombre q est sans dimension)

$T = 32{,}25\, p^{0{,}19}$

2)

Le poids de la bulle est égale à $\rho_B V \vec{g}$, la poussée d'Archimède à $-\rho_A V \vec{g}$.

La bulle monte si $\rho_A > \rho_B$.

$$p_A = \frac{\rho_A R T_A}{M} = p_B = \frac{\rho_B R T_B}{M}$$

La condition $\rho_A > \rho_B$ est assurée si $T_B > T_A$.

La transformation est adiabatique réversible (isentropique) pour un gaz parfait diatomique à

C_p et C_V constantes ⇨ $T\,p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cte$ ⇨ $T_B = T_1\left(\dfrac{p_1}{p_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

Il y a équilibre mécanique (égalité des pressions) entre la bulle et l'atmosphère à toute hauteur.

L'évolution de pression dans l'atmosphère est donnée par $\dfrac{p}{p_0} = (1-\dfrac{\lambda}{T_0}z)^{\frac{Mg}{R\lambda}}$.

Ainsi, $\dfrac{p_1}{p_B} = \left(\dfrac{1-\dfrac{\lambda}{T_0}z}{1-\dfrac{\lambda}{T_0}z_1}\right)^{-\frac{Mg}{R\lambda}}$ ⇨ $T_B = T_1\left(\dfrac{1-\dfrac{\lambda}{T_0}z}{1-\dfrac{\lambda}{T_0}z_1}\right)^{-\frac{Mg(1-\gamma}{R\lambda\gamma}}$

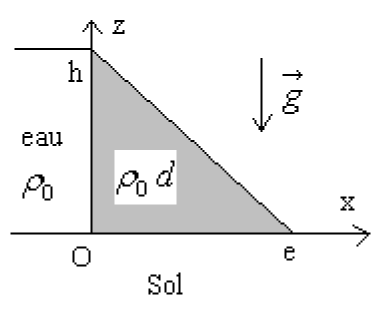
L'altitude plafond z_2 est atteinte si la température de la bulle atteint la température environnante.

$$T_B = T_0(1-\frac{\lambda}{T_0}z_2) = T_1\left(\frac{1-\dfrac{\lambda}{T_0}z_2}{1-\dfrac{\lambda}{T_0}z_1}\right)^{-\frac{Mg(1-\gamma}{R\lambda\gamma}}$$

A.N. $z_2 = 3490m$

13) Etude d'un barrage-poids

Le barrage-poids est représenté en coupe sur la figure ci-contre, la longueur suivant la direction *y* sera prise unitaire. Le matériau constituant le barrage a pour masse volumique $\rho_0\,d$ où d est la densité du matériau par rapport à l'eau de masse volumique ρ_0.



La composante verticale de la force exercée par le sol sur le barrage est de la forme : $\dfrac{dF_z}{dx} = a\,x + b$

- En (ρ_0, d, e, h et g ditions d'équilibre du barrage, calculer les valeurs de a et b en fonction de
- Pourquoi convient-il que $\frac{dF_z}{dx} \geq 0$? En déduire une condition entre h, e et d
- Quelle doit être la valeur de la composante horizontale exercée par le sol sur le barrage.

Réponse 1 |

La pression atmosphérique est uniforme sur la hauteur du barrage, la pression atmosphérique n'intervient pas dans cette exercice. Seule la pression effective intervient (autrement dit, la pression atmosphérique est prise comme référence nulle).

La pression dans l'eau est donc : $p_{eau} = \rho_0\, g\,(h-z) \Rightarrow \overrightarrow{dF_{eau}} = \rho_0\, g\,(h-z)dz\vec{e}_x$

Soit $\overrightarrow{F_{eau}} = \vec{e}_x\, \rho_0\, g\int_0^h (h-z)dz = \vec{e}_x \frac{1}{2}\rho_0\, g\, h^2$

Le moment des forces de pression de l'eau en O est égale à :

$$\overrightarrow{M_{eau}}(O) = -\vec{e}_y\, \rho_0\, g\int_0^h (h-z)zdz = -\vec{e}_y \frac{1}{6}\rho_0\, g\, h^3$$

Le poids du barrage est égale à :

$$\vec{P} = -\vec{e}_z \frac{1}{2}\rho_0\, d\, g\, h\, e$$

Le moment des forces de pesanteur par rapport à eau est égale à :

$\overrightarrow{M_{pes}}(O) = -\vec{e}_y \frac{1}{6}\rho_0\, d\, g\, h\, e^2$ (résultat simple à établir à partir de la position du centre de gravité du barrage)

Le torseur des forces extérieures est nul.

a) Résultante des forces extérieures

$$F_z\vec{e}_z + F_x\vec{e}_x + \overrightarrow{F_{eau}} + \vec{P} = 0$$

$\Rightarrow \int_0^e (a\,x+b)dx = a\frac{e^2}{2} + b\,e = \frac{1}{2}\rho_0\, d\, g\, h\, e \Rightarrow a\,e + 2b = \rho_0\, d\, g\, h \quad (1)$

$$F_x = -\frac{1}{2}\rho_0\, g\, h^2$$ (composante horizontale exercée par le sol sur le barrage)

b) Moment des forces extérieures en O

$$-\vec{e_y}\,\frac{1}{6}\rho_0\, g\, h^3 - \vec{e_y}\,\frac{1}{6}\rho_0\, d\, g\, h\, e^2 + \vec{e_y}\int_0^e (ax+b)\, x\, dx = 0$$

⇨ $$-\frac{1}{6}\rho_0\, g\, h^3 - \frac{1}{6}\rho_0\, d\, g\, h\, e^2 + a\,\frac{e^3}{3} + b\,\frac{e^2}{2} = 0$$ ⇨ $$\frac{2}{3}a\, e + b = \frac{1}{3}\rho_0\, g\, h\,(\frac{h^2}{e^2} + d) \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) permettent de calculer a et b.

Soient $a = \rho_0\, g\,\frac{h}{e}(2\frac{h^2}{e^2} - d)$ et $b = \rho_0\, g\, h\,(d - \frac{h^2}{e^2})$

Ainsi $\frac{dF_z}{dx} = \rho_0\, g\, h\,[\frac{x}{e}(2\frac{h^2}{e^2} - d) + d - \frac{h^2}{e^2}]$

$\frac{dF_z}{dx}$ ne peut être négatif sinon le barrage se soulèverait.

$(\frac{dF_z}{dx})_{x=e} = \rho_0\, g\,\frac{h^3}{e}$ est positif

$(\frac{dF_z}{dx})_{x=0} = \rho_0\, g\, h\,(d - \frac{h^2}{e^2})$ est positif si $d - \frac{h^2}{e^2}$ est positif soit $h < e\sqrt{d}$